Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

2022 - 2023

Αντώνης Βαλέργας

Αποστόλης Κακαβάς

Στέλιος Μιχαήλογλου

Άγγελος Μπλιάς

Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης

Νίκος Σαμπάνης

Βαγγέλης Τόλης

Νίκος Τούντας

Ισαάκ Χιονίδης

8ο Γενικό επαναληπτικό διαγώνισμα

6-5-2023

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν για μια συνάρτηση $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής στο $[-1,0)\cup(0,1]$ τότε η f θα έχει υποχρεωτικά ή ολικό ελάχιστο ή ολικό μέγιστο ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α3. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζετε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

μονάδες 4

Α4. Σε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση μιας τυχαίας συνάρτησης που να ικανοποιεί την αντίστοιχη πρόταση.

α) Συνάρτησης με πεδίο ορισμού [α , β] που να είναι συνεχής στο $(\alpha,\beta]$ και να μην ισχύει το θεώρημα μέγιστης ελάχιστης τιμής.

β) Μιας συνάρτησης αντιστρέψιμης και της αντίστροφή της στο ίδιο σύστημα αναφοράς που έχουν και κοινά σημεία που δεν ανήκουν πάνω στην ευθεία $y=x$.

γ) Συνάρτησης που να είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)\neq f(\beta)$ και όμως να ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle στο [α,β].

δ) Μιας συνάρτησης , που να είναι $f(x)<0$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε) Συναρτήσεων που να έχουν την ίδια παράγωγο ενώ οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες.

μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1+e^x & , x<0\\ x^2+4x+\alpha & , x\geq 0\end{cases}$.

Β1. Να βρείτε την τιμή του α.

Μονάδες 3

Αν α=2:

Β2. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.

Μονάδες 6

Β3. Να δείξετε ότι η f γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 3

Β4. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται (Μονάδες 2) και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση της f .

Μονάδες 8

Β5. Να βρείτε το εμβαδόν μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της γραφικής παράστασης της f^{-1} και των ευθειών x=2 και x= 3.

Μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,4]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα [0,4] .

Επίσης f(0)=f(4)=0.

Γ1. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi\in(0,4)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=0$.

Μονάδες 5

Γ2. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο ξ του προηγούμενου ερωτήματος .

Μονάδες 5

Γ3. Να βρείτε ποιο είναι το μέγιστο της f και ποιες είναι οι θέσεις του.

Μονάδες 4

Αν η f παρουσιάζει ελάχιστο στο ξ=2 το f(2)=-2:

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f κάθετες μεταξύ τους.

Μονάδες 4

Γ5.α) Αν Α(α,f(α)) , Β(β,f(β) δύο σημεία της γραφικής παράστασης της f με 0<α < β< 4 , να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται κάτω από το τμήμα ΑΒ στο διάστημα (α, β).

Μονάδες 3

β) Αν Ε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και του άξονα των x , να δείξετε ότι Ε>4 .

Μονάδες 4

Θέμα Δ

Δίνεται μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x-1)f'(x)=xe^x-e^x-2x^2+2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και f(0)=2.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=e^x-x^2-2x+1,\ x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 7

Δ2. Να δείξετε ότι η f έχει δύο τοπικά ακρότατα .

Μονάδες 6

Δ3. α) Αν x_1, x_2 οι θέσεις των ακροτάτων με $x_1<x_2$, να δείξετε ότι $x_1<0$.

Μονάδες 2

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=2 έχει ακριβώς 3 ρίζες .

Μονάδες 6

Δ4.α) Να βρείτε το εμβαδόν Ε(α) μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=x\left(f(x)+x^2-1\right),\ x\in\mathbb{R}$, των ευθείων x=1 , x=α με α >2 και του άξονα των x.

β) Αν ο ρυθμός μεταβολής της παραμέτρου α είναι α ΄(t)=2t , όπου t χρόνος σε sec και τη χρονική στιγμή t =0 είναι α=3cm, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε(α), την χρονική στιγμή t=1 sec.

Μονάδες 4

Ευχόμαστε επιτυχία!

Λύσεις

Α1. Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$,οπότε

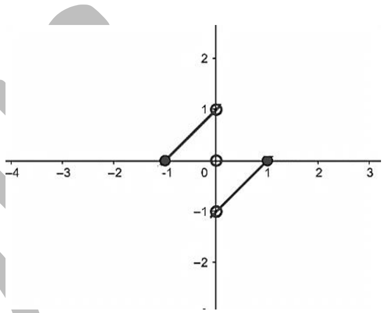
$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Α2.α) Ψευδής

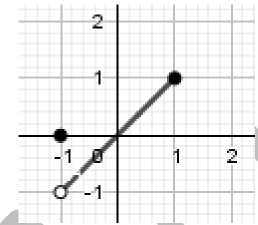
β) Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\in[-1,0) \\ 0, & x=0 \\ x-1, & x\in(0,1] \end{cases}$ είναι συνεχής στο $[-1,0)\cup(0,1]$. Είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στα $[-1,0)$ και $(0,1]$ οπότε $f([-1,0))=[0,1)$ και $f((0,1])=(-1,0]$.

Άρα έχει σύνολο τιμών το $(-1,1)$ οπότε δεν έχει ακρότατα.

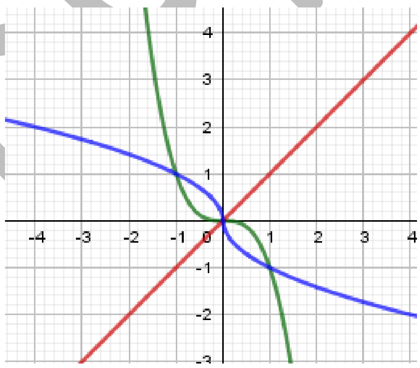


Α3. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

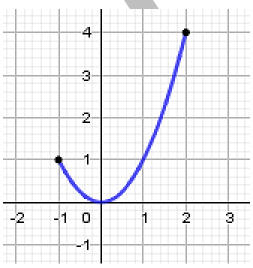
Α4. α) $f(x)=\begin{cases} x, x\in(-1,1] \\ 0, x=-1 \end{cases}$



β) $f(x)=-x^3,\ x\in\mathbb{R}$

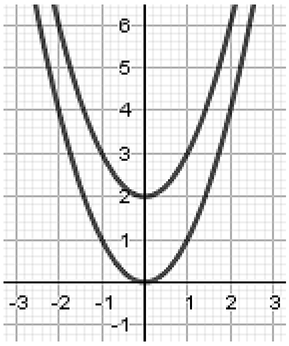


γ) $f(x)=x^2, x\in[-1,2]$



δ) $f(x)=-e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$

ε) $f(x) = x^2$ **,** $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x^2 + 2$**,** $x \in \mathbb{R}$



Θέμα Β

Β1. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα είναι συνεχής στο 0, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1+e^x\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2+4x+\alpha\right) = 2 \Leftrightarrow \alpha = 2.$

Άρα $f(x) = \begin{cases} 1+e^x & , \ x<0 \\ x^2+4x+2 & , \ x \ge 0 \end{cases}$.

Β2. Για κάθε x<0 η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = \left(1+e^x\right)' = e^x > 0.$

Για κάθε x>0 η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = \left(x^2+4x+2\right)' = 2x+4 > 0$.

Θα εξετάσουμε αν f είναι παραγωγίσιμη στο 0:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1+e^x-2}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0^-}\frac{\left(e^x-1\right)'}{x'} = \lim_{x\to 0} e^x = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+4x+2-2}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+4x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(x^2+4x\right)'}{x'} = \lim_{x\to 0^+}\left(2x+4\right) = 4.$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, οπότε το 0 είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

Β3. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Β4. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι 1-1.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+e^x\right) = 1$ και, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2+4x+2\right) = +\infty$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = (1, +\infty)$. Επομένως η f αντιστρέφεται και το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $A_{f^{-1}} = f(A) = (1, +\infty)$.

Για x<0 : $\begin{pmatrix} f(x) = y \\ x<0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+e^x = y \\ x<0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} e^x = y-1 \\ x<0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = \ln(y-1), \ y>1 \\ x<0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = \ln(y-1), \ y>1 \\ \ln(y-1) < 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = \ln(y-1), \ y>1 \\ y-1 < e^0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = \ln(y-1), \ y>1 \\ y<2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow x = \ln(y-1), \ y \in (1, 2)$

$$\begin{pmatrix} f(x)=y \\ x\ge 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2+4x+2=y \\ x\ge 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2+4x+4=y+2 \\ x\ge 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} (x+2)^2=y+2\ ,\ y\ge -2 \\ x\ge 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

Για $x\ge 0$: $\begin{pmatrix} x+2=\sqrt{y+2}\ ,\ y\ge -2 \\ x\ge 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x=\sqrt{y+2}-2\ ,\ y\ge -2 \\ \sqrt{y+2}-2\ge 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x=\sqrt{y+2}-2\ ,\ y\ge -2 \\ \sqrt{y+2}\ge 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x=\sqrt{y+2}-2\ ,\ y\ge -2 \\ y\ge 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x=\sqrt{y+2}-2\ ,\ y\ge 2$$

Τελικά $f^{-1}(x)=\begin{cases} \ln(x-1)\ ,\ x\in(1,2) \\ \sqrt{x+2}-2\ ,\ x\ge 2 \end{cases}$.

B5. $E(\Omega)=\int_2^3 \left|f(x)-f^{-1}(x)\right|dx$

Για $x\in[2,3]: f(x)-f^{-1}(x)=x^2+4x+2-\left(\sqrt{x+2}-2\right)=x^2+4x+4-\sqrt{x+2}=(x+2)^2-\sqrt{x+2}$

Για $2\le x\le 3$ είναι $4\le x+2\le 5 \Leftrightarrow 16\le (x+2)^2\le 25\ (1)$ και $2\le \sqrt{x+2}\le \sqrt{5} \Leftrightarrow -\sqrt{5}\le \sqrt{x+2}\le -2\ (2)$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει ότι

$16-\sqrt{5}\le (x+2)^2-\sqrt{x+2}\le 23$ επομένως $f(x)-f^{-1}(x)>0$ για κάθε $x\in[2,3]$.

$E(\Omega)=\int_2^7 \left(f(x)-f^{-1}(x)\right)dx=\int_2^3\left((x+2)^2-\sqrt{x+2}\right)dx$

Θέτουμε $u=\sqrt{x+2}\Leftrightarrow u^2=x+2$

Άρα $\left(u^2\right)'du=(x+2)'dx\Leftrightarrow 2udu=dx$

Για $x=2: u=\sqrt{2+2}=2$ και για $x=3: u=\sqrt{7+2}=3$

Οπότε: $E(\Omega)=\int_2^3\left(u^4-u\right)\cdot 2udu=2\int_2^3\left(u^5-u^2\right)du=2\left[\frac{u^6}{6}-\frac{u^3}{3}\right]_2^3=2\left[\left(\frac{3^6}{6}-\frac{3^3}{3}\right)-\left(\frac{2^6}{6}-\frac{2^3}{3}\right)\right]=209$τμ

Θέμα Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο διάστημα [0,4] , παραγωγίσιμη στο διάστημα (0,4) αφού είναι παραγωγίσιμη στο $[0,4]$, f(0)=f(4)=0, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,4)$ τέτοιο ώστε f ΄(ξ)=0.

Επίσης η f είναι κυρτή στο [0,4] , άρα η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο (0,4) επομένως το ξ είναι μοναδικό.

Γ2. Η f είναι συνεχής στο διάστημα [0,4]. Για κάθε $x\in(0,\xi)$ είναι : $x<\xi \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(\xi)\Rightarrow f'(x)<0$ και για κάθε $x\in(\xi,4)$ είναι $x>\xi \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(\xi)\Rightarrow f'(x)>0$. Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο ξ.

Γ3. Η f είναι συνεχής στο διάστημα [0,ξ] και $f'(x)<0$ στο $[0,\xi]$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,ξ]. Επίσης η f είναι συνεχής στο διάστημα [ξ,4] και $f'(x)>0$ στο $[\xi,4]$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο [ξ,4] .

Για κάθε $x\in[0,\xi]: x\ge 0 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)\le f(0)\Rightarrow f(x)\le 0$ και για κάθε $x\in[\xi,4]: x\le 4 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)\le f(4)\Rightarrow f(x)\le 0$.

Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο x=0 και στο x=4 το 0.

Γ4. Η f είναι συνεχής στο διάστημα [0,2] , παραγωγίσιμη στο διάστημα (0,2), άρα σύμφωνα με το θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{-2 - 0}{2} = -1.$$

Η f είναι συνεχής στο διάστημα [2,4], παραγωγίσιμη στο διάστημα (2,4), άρα σύμφωνα με το θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (2,4)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{0 - (-2)}{2} = 1$.

Επομένως $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = -1$, άρα υπάρχουν δύο εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f κάθετες μεταξύ τους.

Γ5.α) Η ευθεία AB έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ και εξίσωση

$$y - f(\alpha) = \lambda_{AB}(x - \alpha) \Leftrightarrow y = \lambda_{AB}(x - \alpha) + f(\alpha).$$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $f(x) < \lambda_{AB}(x - \alpha) + f(\alpha)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \lambda_{AB}(x - \alpha) - f(\alpha),\ x \in [\alpha, \beta]$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g'(x) = f'(x) - \lambda_{AB}$.

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \lambda_{AB}$, οπότε $g'(x) = f'(x) - f'(\xi)$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[0,4]$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta] \subseteq [0,4]$.

Για κάθε $\alpha < x < \xi \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x) - f'(\xi) < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \xi]$, οπότε για

$$\alpha < x \le \xi \overset{g\searrow}{\Rightarrow} g(\alpha) > g(x) \ge g(\xi) \Rightarrow 0 > g(x) \ge g(\xi) \Rightarrow g(x) < 0,\ \forall x \in (\alpha, \xi]$$

Για κάθε $\xi < x < \beta \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x) - f'(\xi) > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[\xi, \beta]$, οπότε για

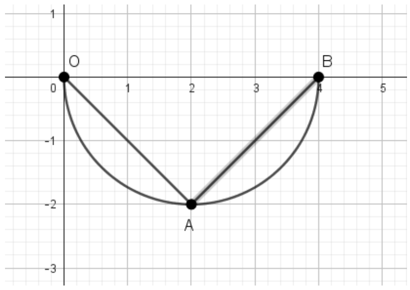
$$\xi \le x < \beta \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(\xi) \le g(x) < g(\beta) \Rightarrow g(x) < 0,\ \forall x \in [\xi, \beta).$$

Οπότε για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ είναι $g(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) - \lambda_{AB}(x - \alpha) + f(\alpha) < 0 \Leftrightarrow f(x) < \lambda_{AB}(x - \alpha) + f(\alpha)$.

β) Σχεδιάζοντας μια γραφική παράσταση που ικανοποιεί τις ιδιότητες της f και έχουμε τα σημεία O(0,0), A(2,-2), B(4,0). Οπότε:

$$E = \int_0^4 |f(x)| dx \overset{f(x) \le 0}{=} \int_0^4 (-f(x)) dx > (OAB) = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4,$$

αφού η C_f βρίσκεται κάτω από τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΑ και ΑΒ εκτός από τα σημεία Ο,Α,Β.



Θέμα Δ

Δ1. Για $x \ne 1: f'(x) = \frac{xe^x - e^x - 2x^2 + 2}{x - 1} = \frac{e^x(x-1) - 2(x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{e^x(x-1) - 2(x-1)(x+1)}{x - 1} =$

$$= \frac{(x-1)(e^x - 2x - 2)}{x - 1} = e^x - 2x - 2 \Rightarrow f'(x) = (e^x - x^2 - 2x)'.$$

Για $x \in (-\infty, 1)$ υπάρχει $c_1 \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(x) = e^x - x^2 - 2x + c_1$.

$f(0)=2 \Leftrightarrow 1+c_1=2 \Leftrightarrow c_1=1$. Άρα $f(x)=e^x-x^2-2x+1$.

Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ υπάρχει $c_2\in\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(x)=e^x-x^2-2x+c_2$.

Η f είναι συνεχής στο 1 ως παραγωγίσιμη άρα $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x) \Leftrightarrow e-3+c_2=e-2 \Leftrightarrow c_2=1$, οπότε $f(x)=e^x-x^2-2x+1$.

Είναι $f(1)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=2$, οπότε τελικά $f(x)=e^x-x^2-2x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών.

$f'(x)=e^x-2x-2,\ x\in\mathbb{R}$, $f''(x)=e^x-2,\ x\in\mathbb{R}$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\ln2$ και $f''(x)>0 \Leftrightarrow x>\ln2$.

Οπότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ln2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\ln2,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-2x-2\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-2x-2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(1-\dfrac{2x}{e^x}-\dfrac{2}{e^x}\right)=+\infty$ όπου $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$.

Η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(-\infty,\ln2]$, άρα

$f'(\Delta_1)=\left[f'(\ln2),\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)\right)=[-2\ln2,+\infty)$.

Το $0\in f'(\Delta_1)$ και f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ln2]$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_1\in(-\infty,\ln2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=0$. Οπότε για $x\in(-\infty,\ln2]$:

αν $x<x_1 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x)>0$ και αν $\ln2>x>x_1 \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x)<0$

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=(\ln2,+\infty)$, άρα

$f'(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to\ln2^+}f'(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)\right)=(-2\ln2,+\infty)$.

Το $0\in f'(\Delta_2)$ και f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(\ln2,+\infty]$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_2\in(\ln2,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2)=0$. Οπότε για $x\in(\ln2,+\infty)$:

αν $\ln2<x<x_2 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x)<0$ και αν $x>x_2 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x)>0$.

Τελικά f συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f'(x)>0$ στα $(-\infty,x_1)$ και στο $(x_2,+\infty)$, $f'(x)<0$ στο (x_1,x_2), άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Δ3. α) Η f' είναι συνεχής στο $[-1,0]$, $f'(0)=-1$, $f'(-1)=\dfrac{1}{e}$ οπότε $f'(0)\cdot f'(-1)<0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,0)$.

Όμως η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα $x_1\in(-\infty,\ln2)$ οπότε $x_1<0$.

β) Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $x_1<0<\ln2<x_2$.

Είναι $x_1<0 \overset{f\searrow \text{στο}(x_1,x_2)}{\Leftrightarrow} f(x_1)>f(0) \Leftrightarrow f(x_1)>2$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-x^2-2x+1\right)=-\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2-2x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2\right)=-\infty$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $K_1=(-\infty,x_1]$, άρα $f(K_1)=(-\infty,f(x_1)]$.

Το $2\in f(K_1)$ και f είναι γνησίως αύξουσα στο K_1, άρα υπάρχει μοναδικό $\rho_1\in(-\infty,x_1)$ τέτοιο ώστε $f(\rho_1)=2$.

Έχουμε $x_2>0>x_1 \overset{f\searrow \text{στο}(x_1,x_2)}{\Leftrightarrow} f(x_2)<f(0)<f(x_1) \Leftrightarrow f(x_2)<2<f(x_1)$. Οπότε αν $K_2=(x_1,x_2)$ τότε το $2\in f(K_2)$ και f είναι γνησίως φθίνουσα στο K_2, και $f(0)=2$ άρα το 0 μοναδική ρίζα της εξίσωσης

f(x) =2 στο διάστημα $K_2=(x_1 , x_2)$.

Επίσης $x_2>0 \overset{f\searrow \text{στο}(x_1,x_2)}{\Leftrightarrow} f(x_2)<f(0)\Leftrightarrow f(x_2)<2$ και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-x^2-2x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}e^x\left(1-\frac{x^2}{e^x}-\frac{2x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)=+\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $K_3=[x_2,+\infty)$, άρα $f(K_3)=[f(x_2),+\infty)$.

Το $2\in f(K_3)$ και f είναι γνησίως αύξουσα στο K_3, άρα υπάρχει μοναδικό $\rho_2\in(x_2+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(\rho_2)=2$.

Τελικά η εξίσωση f(x)=2 έχει ακριβώς 3 ρίζες τις ρ_1, 0, ρ_2.

Δ4. α) $h(x)=x\left(f(x)+x^2-1\right)=x\left(e^x-x^2-2x+1+x^2-1\right)=x\left(e^x-2x\right), x\in\mathbb{R}$.

Οπότε $E(\alpha)=\int_1^\alpha |h(x)|dx$. Θα βρούμε το πρόσημο της h στο [1,α] με α>2.

Έστω $g(x)=e^x-2x$, $x\in\mathbb{R}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=\left(e^x-2x\right)'=e^x-2$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow x=\ln 2$ και $g'(x)>0\Leftrightarrow x>\ln 2$.

Άρα $g'(x)<0$ στο $(-\infty,\ln 2)$ και $g'(x)>0$ στο $(\ln 2,+\infty)$, επομένως η g έχει ελάχιστο στο ln2 το $g(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2=2-2\ln 2=\ln e^2-\ln 4>0$. Άρα $g(x)\geq g(\ln 2)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως $h(x)>0$ στο $[1,\alpha]$.

$$E(\alpha)=\int_1^\alpha h(x)dx=\int_1^\alpha (xe^x-2x^2)dx=\int_1^\alpha xe^x dx-2\int_1^\alpha x^2dx=\alpha e^\alpha-e^\alpha-\frac{2\alpha^3}{3}+\frac{2}{3}\ \text{τμ}$$

$$\to\int_1^\alpha xe^x dx=\int_1^\alpha x\left(e^x\right)'dx=\left[xe^x\right]_1^\alpha-\int_1^\alpha e^x dx=\alpha e^\alpha-e-\left(e^\alpha-e\right)=\alpha e^\alpha-e^\alpha$$

$$\to 2\int_1^\alpha x^2dx=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^\alpha=\frac{2\alpha^3}{3}-\frac{2}{3}$$

β) $E'(t)=\left(\alpha(t)e^{\alpha(t)}-e^{\alpha(t)}-\frac{2\alpha^3(t)}{3}+\frac{2}{3}\right)'=\alpha'(t)e^{\alpha(t)}+\alpha(t)e^{\alpha(t)}\alpha'(t)-2\alpha^2(t)\alpha'(t)$

Έχουμε $\alpha'(t)=2t\Leftrightarrow\alpha'(t)=\left(t^2\right)'$, άρα υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\alpha(t)=t^2+c$.

Όμως $\alpha(0)=3\Leftrightarrow c=3$, οπότε $\alpha(t)=t^2+3$, $t\geq 0$.

Για t=1 : α(1)=4 , α΄(1)=2, άρα

$$E'(1)=\alpha'(1)e^{\alpha(1)}+\alpha(1)e^{\alpha(1)}\alpha'(1)-2\alpha^2(1)\alpha'(1)=2\cdot e^4+4e^4\cdot 2-2\cdot 4^2\cdot 2=\left(10\cdot e^4-64\right)\frac{cm^2}{sec}$$